

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 56

Задание 1. Вариант 1. Натуральное число, каждые две соседние цифры которого дают чётную сумму, назовем почётным, а натуральное число, каждые две соседние цифры которого дают нечётную сумму — понечётным. Найдите наименьшее почётное число с суммой цифр равной 2026. Сколько цифр в этом числе? Запишите первые две цифры получившегося числа.

Ответ: 226; 19.

Решение. Натуральное число тем меньше, чем меньше цифр оно содержит. Поскольку сумма цифр задана, сами они должны быть как можно больше. Тем самым надо взять максимально возможное количество цифр 9 — их 225, остается 1. Чтобы сделать число минимальным, надо 1 поставить в самое начало, и получится $19\dots 9$, а всего цифр будет 226. Меньшего числа получить нельзя, поскольку меньше 226 цифр в нем быть не может, и других чисел, начинающихся с 1, при этом количестве цифр нет.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

только один верный ответ — 4 балла, невзирая на второй

Задание 1. Вариант 2. Натуральное число, каждые две соседние цифры которого дают чётную сумму, назовем почётным, а натуральное число, каждые две соседние цифры которого дают нечётную сумму — понечётным. Найдите наименьшее почётное число с суммой цифр равной 2028. Сколько цифр в этом числе? Запишите первые две цифры получившегося числа.

Ответ: 226; 39.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

только один верный ответ — 4 балла, невзирая на второй

Задание 1. Вариант 3. Натуральное число, каждые две соседние цифры которого дают чётную сумму, назовем почётным, а натуральное число, каждые две соседние цифры которого дают нечётную сумму — понечётным. Найдите наименьшее почётное число с суммой цифр равной 2014. Сколько цифр в этом числе? Запишите первые две цифры получившегося числа.

Ответ: 224; 79.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

только один верный ответ — 4 балла, невзирая на второй

Задание 1. Вариант 4. Натуральное число, каждые две соседние цифры которого дают чётную сумму, назовем почётным, а натуральное число, каждые две соседние цифры которого дают нечётную сумму — понечётным. Найдите наименьшее почётное число с суммой цифр равной 2001. Сколько цифр в этом числе? Запишите первые две цифры получившегося числа.

Ответ: 223; 39.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

только один верный ответ — 4 балла, невзирая на второй

Задание 2. Вариант 1. Две подружки Катя и Соня в ходе телефонных бесед обменивались новостями: Катя рассказала Соне одну новость, та в ответ — свою, в следующий раз Катя снова рассказала одну новость, а Соня — две, и всё время Катя рассказывала ровно одну новость, а Соня — на одну больше, чем в предыдущий раз. В ходе очередной беседы настал момент, когда было рассказано ровно 1000 новостей. Сколько из них рассказала Соня?

Ответ: 956.

Решение.

Первое решение. Обозначим новость, рассказанную Катей, «1», а новость, рассказанную Соней, «0». Тогда получаем последовательность $10100100010000\dots$, состоящую из 1000 символов. Символ «1» стоит на позициях $1, 3 = 1 + 2, 6 = 1 + 2 + 3, \dots$. То есть n -я единица стоит на позиции $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Определим, каков максимальный номер позиции «1»: $\frac{n(n+1)}{2} < 1000$. Максимальное решение этого неравенства, являющееся натуральным числом — это 44, значит, в последовательности будет 44 символов «1» и, соответственно, $1000 - 44 = 956$ символов «0».

Второе решение. Назовем группой последовательность $10\dots 0$, после которой стоит 1. Пусть среди 1000 символов n полных групп. Тогда в них будет n символов «1» и $1+2+\dots+n$ символов «0». Тогда $n + \frac{n(n+1)}{2} \leq 1000$; $2n + n(n+1) \leq 2000$; $n^2 + 3n \leq 2000$. Наибольшее натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству, — число 43. При этом равенство не достигается, а значит, среди 1000 символов будет 43 полные группы и неполная 44-я, что даст 44 символа «1» и, соответственно, 956 символов «0».

Замечание. При втором способе подсчета, в котором сразу считается количество символов «0», возможна ошибка на 1 на последнем шаге, в связи с чем ответ 957 оценивается частичным баллом.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

ответ 957 — 4 балла

Задание 2. Вариант 2. Две подружки Катя и Соня в ходе телефонных бесед обменивались новостями: Катя рассказала Соне одну новость, та в ответ – свою, в следующий раз Катя снова рассказала одну новость, а Соня – две, и всё время Катя рассказывала ровно одну новость, а Соня – на одну больше, чем в предыдущий раз. В ходе очередной беседы настал момент, когда было рассказано ровно 800 новостей. Сколько из них рассказала Соня?

Ответ: 761.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

ответ 762 — 4 балла

Задание 2. Вариант 3. Две подружки Катя и Соня в ходе телефонных бесед обменивались новостями: Катя рассказала Соне две новости, та в ответ – свою, в следующий раз Катя снова рассказала две новости, и Соня тоже две, и всё время Катя рассказывала ровно по две новости, а Соня – на одну больше, чем в предыдущий раз. В ходе очередной беседы настал момент, когда было рассказано ровно 1000 новостей. Сколько из них рассказала Соня?

Ответ: 914.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

ответ 916 — 4 балла

Задание 2. Вариант 4. Две подружки Катя и Соня в ходе телефонных бесед обменивались новостями: Катя рассказала Соне две новости, та в ответ – свою, в следующий раз Катя снова рассказала две новости, и Соня тоже две, и всё время Катя рассказывала ровно по две новости, а Соня – на одну больше, чем в предыдущий раз. В ходе очередной беседы настал момент, когда было рассказано ровно 800 новостей. Сколько из них рассказала Соня?

Ответ: 724.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

ответ 726 — 4 балла

Задание 3. Вариант 1.

Два приятеля отправились на охоту, предполагая всё время двигаться с одной и той же скоростью. Однако, проехав $1/3$ расстояния до нужного места, они остановились на смотровой площадке и пробыли там 10 минут. Поехав дальше, приятели увеличили скорость на 30% и надеялись успеть на место даже раньше, чем изначально предполагали. Но, отъехав от смотровой площадки на расстояние, равное $1/12$ всего пути, они поняли, что забыли там штатив. Вернувшись обратно, приятели забрали штатив и немедленно снова поехали в нужном направлении. В итоге им удалось приехать на место точно в первоначально намеченное время. Сколько всего времени они пробыли в пути от дома до места охоты? Ответ дайте в часах, выразив его целым числом, обыкновенной дробью или десятичной дробью.

Ответ: $13/2$.

Решение. Обозначим расстояние от дома до места охоты s км, изначальную скорость v км/ч. Тогда планировавшееся время поездки $\frac{s}{v}$ ч. До остановки проехали $1/3$ пути, значит после нее $2/3 + 2 \cdot 1/12 = 5/6$ пути, так как пришлось дополнительно дважды проехать по $1/12$. Тогда время после остановки составило $\frac{5/6 \cdot s}{1.3v} = \frac{5s}{7.8v} = \frac{25s}{39v}$ ч. Учитывая время на смотровой площадке, получаем уравнение $\frac{s}{v} = \frac{s}{3v} + \frac{25s}{39v} + \frac{1}{6}$. Отсюда $\frac{2s}{3v} - \frac{25s}{39v} = \frac{1}{6}$; $\frac{s}{39v} = \frac{1}{6}$; $\frac{s}{v} = \frac{39}{6} = 6.5$ ч, что и составляет планировавшееся время поездки, соответствующее фактическому.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 2. Два приятеля отправились на охоту, предполагая все время двигаться с одной и той же скоростью. Однако, проехав $1/4$ расстояния до нужного места, они остановились на смотровой площадке и пробыли там 10 минут. Поехав дальше, приятели увеличили скорость на 25% и надеялись успеть на место даже раньше, чем изначально предполагали. Но, отъехав от смотровой площадки на расстояние, равное $1/12$ всего пути, они поняли, что забыли там штатив. Вернувшись обратно, приятели забрали штатив и немедленно снова поехали в нужном направлении. В итоге им удалось приехать на место точно в первоначально намеченное время. Сколько всего времени они пробыли в пути от дома до места охоты? Ответ дайте в часах, выразив его целым числом, обыкновенной дробью или десятичной дробью.

Ответ: 10.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 3. Два приятеля отправились на охоту, предполагая все время двигаться с одной и той же скоростью. Однако, проехав $1/6$ расстояния до нужного места, они остановились на смотровой площадке и пробыли там 10 минут. Поехав дальше, приятели увеличили скорость на 30% и надеялись успеть на место даже раньше, чем изначально предполагали. Но, отъехав от смотровой площадки на расстояние, равное $1/10$ всего пути, они поняли, что забыли там штатив. Вернувшись обратно, приятели забрали штатив и немедленно снова поехали в нужном направлении. В итоге им удалось приехать на место точно в первоначально намеченное время. Сколько всего времени

они пробыли в пути от дома до места охоты? Ответ дайте в часах, выразив его целым числом, обыкновенной дробью или десятичной дробью.

Ответ: $13/3$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 4. Два приятеля отправились на охоту, предполагая все время двигаться с одной и той же скоростью. Однако, проехав $1/3$ расстояния до нужного места, они остановились на смотровой площадке и пробыли там 10 минут. Поехав дальше, приятели увеличили скорость на 20% и надеялись успеть на место даже раньше, чем изначально предполагали. Но, отъехав от смотровой площадки на расстояние, равное $1/20$ всего пути, они поняли, что забыли там штатив. Вернувшись обратно, приятели забрали штатив и немедленно снова поехали в нужном направлении. В итоге им удалось приехать на место точно в первоначально намеченное время. Сколько всего времени они пробыли в пути от дома до места охоты? Ответ дайте в часах, выразив его целым числом, обыкновенной дробью или десятичной дробью. **Ответ:** 6.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 1. Рассматривается квадратный трехчлен $x^2 - 2bx + c^2$, который имеет два различных корня. После уменьшения каждого из этих корней на 1 был получен новый приведенный квадратный трехчлен. На что заменится c^2 ? Выберите все подходящие варианты ответа:

Ответ:

- $c^2 - 2b + 1$
- $c^2 - 1$
- $c^2 + 2b + 1$
- $c^2 + 1$

Решение. Согласно теореме Виета для корней x_1, x_2 данного трехчлена имеем: $x_1 + x_2 = 2b$, $x_1 \cdot x_2 = c^2$. Тогда $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1 = c^2 - 2b + 1$.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 2. Рассматривается квадратный трехчлен $x^2 - 2bx + c^2$, который имеет два различных корня. После увеличения каждого из этих корней на 1 был получен новый приведенный квадратный трехчлен. На что заменится c^2 ? Выберите все подходящие варианты ответа:

Ответ:

- $c^2 + 2b + 1$
- $c^2 - 1$
- $c^2 - 2b + 1$
- $c^2 + 1$

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 3. Рассматривается квадратный трехчлен $x^2 - 2bx + c^2$, который имеет два различных корня. После уменьшения каждого из этих корней на 2 был получен новый приведенный квадратный трехчлен. На что заменится c^2 ? Выберите все подходящие варианты ответа:

Ответ:

- $c^2 - 4b + 4$
- $c^2 + 4b + 4$
- $c^2 - 4$
- $c^2 + 4$

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 4. Рассматривается квадратный трехчлен $x^2 - 2bx + c^2$, который имеет два различных корня. После увеличения каждого из этих корней на 2 был получен новый приведенный квадратный трехчлен. На что заменится c^2 ? Выберите все подходящие варианты ответа:

Ответ:

- $c^2 + 4b + 4$
- $c^2 - 4b + 4$
- $c^2 - 4$
- $c^2 + 4$

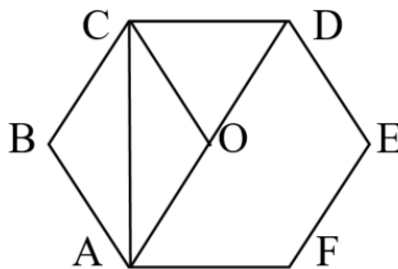
Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 1. Валерий кидает дротик в доску для дартса, имеющую форму правильного шестиугольника $ABCDEF$. При этом он попадает в любую точку доски с равной вероятностью. Найдите вероятность того, что дротик окажется в точке, принадлежащей треугольнику ACD . Ответ укажите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: $1/3$.

Решение.



Искомая вероятность — это отношение площади треугольника ACD к площади шестиугольника. Отметим центр шестиугольника O . Тогда площадь треугольника COD очевидно составляет $1/6$ всего шестиугольника, CO — медиана треугольника ACD , она делит его площадь пополам, поэтому площадь ACD вдвое больше, чем COD , и составляет $1/3$ от площади $ABCDEF$.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 2. Валерий кидает дротик в доску для дартса, имеющую форму правильного шестиугольника $ABCDEF$. При этом он попадает в любую точку доски с равной вероятностью. Найдите вероятность того, что дротик окажется в точке, принадлежащей треугольнику ABC . Ответ укажите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: $1/6$.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 3. Валерий кидает дротик в доску для дартса, имеющую форму правильного шестиугольника $ABCDEF$. При этом он попадает в любую точку доски с равной вероятностью. Найдите вероятность того, что дротик окажется в точке, принадлежащей треугольнику ACE . Ответ укажите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: $1/2$.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 4. Валерий кидает дротик в доску для дартса, имеющую форму правильного шестиугольника $ABCDEF$. При этом он попадает в любую точку доски с равной вероятностью. Найдите вероятность того, что дротик окажется в точке, принадлежащей треугольнику ADE . Ответ укажите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: $1/3$.

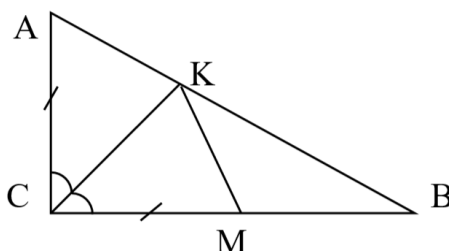
Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 1. Салфетка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами 30 и 40 см. Пусть C — вершина прямого угла. Найдите площадь фигуры, которая получится при складывании этой салфетки по биссектрисе CK . Ответ выразите в квадратных сантиметрах и округлите до целых.

Ответ: 343.

Решение. Изобразим прямоугольный треугольник ABC , $AC = 30$, $BC = 40$, с биссектрисой CK .



При сложении треугольника происходит симметрия относительно прямой, по которой складываем — то есть CK . Тогда точка A переходит в точку M , угол ACK переходит в угол KCM , и точка M лежит на стороне CK . То есть после сложения вместо треугольника ABC получаем треугольник BCK , и его площадь и надо найти.

По теореме Пифагора $AB = 50$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{AK} = \frac{BC}{AC} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$, то есть $BK = \frac{4}{7}AB = \frac{4}{7} \cdot 50 = \frac{200}{7}$. $\sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$. Тогда искомая площадь равна $\frac{1}{2}BC \cdot BK \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot \frac{200}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2400}{7} = 342\frac{6}{7}$, что округляется до 343.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 2. Салфетка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами 10 и 24 см. Пусть C — вершина прямого угла. Найдите площадь фигуры, которая получится при складывании этой салфетки по биссектрисе CK . Ответ выразите в квадратных сантиметрах и округлите до целых.

Ответ: 85.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 3. Салфетка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами 16 и 30 см. Пусть C — вершина прямого угла. Найдите площадь фигуры, которая получится при складывании этой салфетки по биссектрисе CK . Ответ выразите в квадратных сантиметрах и округлите до целых.

Ответ: 157.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 4. Салфетка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами 15 и 20 см. Пусть C — вершина прямого угла. Найдите площадь фигуры, которая получится при складывании этой салфетки по биссектрисе CK . Ответ выразите в квадратных сантиметрах и округлите до целых.

Ответ: 86.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 1. В буфете продаются только пирожки с картошкой по 18 рублей и пирожки с капустой по 22 рубля. Выручка буфета за день составила 1500 рублей. Определите минимальное и максимальное возможные количества проданных за день пирожков.

Ответ: минимальное: 70; максимальное: 82.

Решение. Обозначим количества проданных пирожков соответственно как x и y . Имеем: $18x + 22y = 1500$; отсюда очевидно, что $y \div 3$. Пусть $y = 3k$, k — натуральное или 0. Тогда $18x + 66k = 1500$; $3x + 11k = 250$ (*). Отсюда $k \leq 22$, так как $11 \cdot 23 = 253 > 250$. Далее, обозначим искомую величину — общее количество пирожков — как m . Имеем $m = x + y = x + 3k$; $x = m - 3k$. Тогда, подставив в (*), имеем: $3(m - 3k) + 11k = 250$; $3m + 2k = 250$; $m = \frac{250 - 2k}{3} = \frac{2(125 - k)}{3}$. Отсюда видим, что m — четное и $(125 - k) \div 3$. Но $0 \leq k \leq 22$, а значит наибольшее m не превосходит $\frac{250}{3}$, из вышесказанного это 82. Наименьшее m будет не меньше $\frac{2 \cdot 103}{3} = 68\frac{2}{3}$, и с учетом его чётности это дает минимальное значение 70.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

дан один верный ответ, причем в соответствии с наименьшим — наибольшим, второй ответ отсутствует или неверен — 3 балла

Задание 7. Вариант 2. В буфете продаются только пирожки с картошкой по 18 рублей и пирожки с капустой по 22 рубля. Выручка буфета за день составила 1640 рублей. Определите минимальное и максимальное возможные количества проданных за день пирожков.

Ответ: минимальное: 76; максимальное: 90.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

дан один верный ответ, причем в соответствии с наименьшим — наибольшим, второй ответ отсутствует или неверен — 3 балла

Задание 7. Вариант 3. В буфете продаются только пирожки с картошкой по 16 рублей и пирожки с капустой по 22 рубля. Выручка буфета за день составила 1680 рублей. Определите минимальное и максимальное возможные количества проданных за день пирожков.

Ответ: минимальное: 78; максимальное: 105.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

дан один верный ответ, причем в соответствии с наименьшим — наибольшим, второй ответ отсутствует или неверен — 3 балла

Задание 7. Вариант 4. В буфете продаются только пирожки с картошкой по 16 рублей и пирожки с капустой по 22 рубля. Выручка буфета за день составила 1720 рублей. Определите минимальное и максимальное возможные количества проданных за день пирожков.

Ответ: минимальное: 79; максимальное: 106.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

дан один верный ответ, причем в соответствии с наименьшим — наибольшим, второй ответ отсутствует или не верен — 3 балла

Задание 8. Вариант 1. По кругу стоят 180 человек: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из этих людей заявил: «Среди окружающих меня четырех человек — двух с одной и двух с другой стороны — лжецов больше, чем рыцарей». (Таким образом, человек на позиции с номером 5, например, заявляет о людях на позициях с номерами 3,4,6 и 7). Найдите наименьшее и наибольшее возможное число рыцарей.

Ответ: наименьшее: 60; наибольшее: 90

Решение. Назовем *окружением* человека упомянутую в условии группу из четырех его соседей. У рыцаря в окружении может быть либо 4, либо 3 лжеца, поскольку при меньшем их числе утверждение «в моем окружении лжецов больше, чем рыцарей» истинным быть не может. Если в окружении рыцаря 4 лжеца, то люди расставлены так: ...ЛЛРЛЛРЛЛРЛЛ... , то есть рыцарем является каждый третий. Меньше рыцарей быть не может, так как тогда должны будут образовываться группы вида ЛЛЛРЛ, и будут находиться лжецы, в окружении которых лжецов больше, а значит утверждение из условия окажется истинным, а оно при произнесении лжецом обязательно должно быть ложным. Тем самым, минимальное количество рыцарей — 60. Если же в окружении рыцаря 3 лжеца, то расстановка следующая: ...ЛЛРРЛЛРРЛЛ... , и она заполнит весь круг, если общее число людей кратно 4, и при этом в каждой группе из четырех человек два лжеца и два рыцаря, то есть рыцарей ровно половина. Получаем, что максимальное число рыцарей — 90.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

дан один верный ответ, причем в соответствии с наименьшим/наибольшим, второй ответ отсутствует или не верен — 3 балла.

Задание 8. Вариант 2. По кругу стоят 132 человека: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из этих людей заявил: «Среди окружающих меня четырех человек — двух с одной и двух с другой стороны — лжецов больше, чем рыцарей». (Таким образом, человек на позиции с номером 5, например, заявляет о людях на позициях с номерами 3,4,6 и 7). Найдите наименьшее и наибольшее возможное число рыцарей.

Ответ: наименьшее: 44; наибольшее: 66

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

дан один верный ответ, причем в соответствии с наименьшим/наибольшим, второй ответ отсутствует или не верен — 3 балла.

Задание 8. Вариант 3. По кругу стоят 288 человек: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из этих людей заявил: «Среди окружающих меня четырех человек — двух с одной и двух с другой стороны — лжецов больше, чем рыцарей». (Таким образом, человек на позиции с номером 5, например, заявляет о людях на позициях с номерами 3,4,6 и 7). Найдите наименьшее и наибольшее возможное число рыцарей.

Ответ: наименьшее: 96; наибольшее: 144

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

дан один верный ответ, причем в соответствии с наименьшим/наибольшим, второй ответ отсутствует или не верен — 3 балла.

Задание 8. Вариант 4. По кругу стоят 240 человек: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из этих людей заявил: «Среди окружающих меня четырех человек — двух с одной и двух с другой стороны — лжецов больше, чем рыцарей». (Таким образом, человек на позиции с номером 5, например, заявляет о людях на позициях с номерами 3,4,6 и 7). Найдите наименьшее и наибольшее возможное число рыцарей.

Ответ: наименьшее: 80; наибольшее: 120

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

дан один верный ответ, причем в соответствии с наименьшим/наибольшим, второй ответ отсутствует или не верен — 3 балла.

Сириус.Курсы — для тех,
кто хочет знать больше!

