Максимальное количество баллов за олимпиаду — 56

Задание 1. Вариант 1. Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 24252627?

Ответ: 624252627.

Решение. Сумма 9 последовательных натуральных чисел равна удевятерённому среднему из них. Значит, эта сумма должна делиться на 9. Данное 6-значное число на 9 не делится. Значит, к нему необходимо приписать вначале одну цифру. Она подбирается согласно признаку делимости на 9.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 1. Вариант 2. Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 22232425?

Ответ: 522232425.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 1. Вариант 3. Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 25262728?

Ответ: 225262728.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 1. Вариант 4. Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 29282726??

Ответ: 729282726.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 2. Вариант 1. На доске написаны 70 натуральных чисел. Аня и Ваня по очереди стирают с доски числа: сначала Аня стирает 11 чисел, затем Ваня стирает 10 чисел, после этого Аня стирает 9 чисел, за ней Ваня — 8 чисел, и так далее, и в конце Аня стирает 1 число. Аня хочет, чтобы все 4 оставшихся на доске числа были чётными. Какое наименьшее количество чётных чисел должно быть изначально написано на доске, чтобы ей гарантированно удалось это сделать?

Ответ: 34.

Решение. Аня добьется своей цели, если изначальное количество чётных чисел на доске не меньше $A + B$, где $A = 4$, $B = 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 30$ (максимальное количество чётных чисел, которое может стереть Ваня).

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 2. Вариант 2. На доске написаны 73 натуральных числа. Аня и Ваня по очереди стирают с доски числа: сначала Аня стирает 11 чисел, затем Ваня стирает 10 чисел, после этого Аня стирает 9 чисел, за ней Ваня — 8 чисел, и так далее, и в конце Аня стирает 1 число. Аня хочет, чтобы все 7 оставшихся на доске числа были чётными. Какое наименьшее количество чётных чисел должно быть изначально написано на доске, чтобы ей гарантированно удалось это сделать?

Ответ: 37.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 2. Вариант 3. На доске написаны 96 натуральных чисел. Аня и Ваня по очереди стирают с доски числа: сначала Аня стирает 13 чисел, затем Ваня стирает 12 чисел, после этого Аня стирает 11 чисел, за ней Ваня — 10 чисел, и так далее, и в конце Аня стирает 1 число. Аня хочет, чтобы все 5 оставшихся на доске числа были чётными. Какое наименьшее количество чётных чисел должно быть изначально написано на доске, чтобы ей гарантированно удалось это сделать?

Ответ: 47.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 2. Вариант 4. На доске написаны 99 натуральных чисел. Аня и Ваня по очереди стирают с доски числа: сначала Аня стирает 13 чисел, затем Ваня стирает 12 чисел, после этого Аня стирает 11 чисел, за ней Ваня — 10 чисел, и так далее, и в конце Аня стирает 1 число. Аня хочет, чтобы все 8 оставшихся на доске числа были чётными. Какое наименьшее количество чётных чисел должно быть изначально написано на доске, чтобы ей гарантированно удалось это сделать?

Ответ: 50.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 1.

Уравнение $\left(x^2 + 14x + b\right)\left(x^2 + 14x + b + 18\right) = 0$ имеет четыре корня, образующих арифметическую прогрессию. Каким может быть первый член этой прогрессии? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: -11.5; -2.5.

Решение. Пусть a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ — данные четыре корня, образующие арифметическую прогрессию. По теореме Виета получается, что корни могут быть разбиты на две пары с суммой чисел в парах равной (-14). Значит, одна пара — это a и $a+3d$, вторая – это $a+d$ и $a+2d$. По второй части теоремы Виета получаем: $a\,(a+3d)-(a+d)\,(a+2d)=-2d^2=18$ или -18. Первый случай невозможен, а для второго получаем: $d=3$ или $d=-3$. Тогда из равенства $2a+3d=-14$ при $d=3$ получаем $a=-11,5$ а при $d=-3$ получаем $a=-2,5$.

Критерий оценивания:
точное совпадение ответа — 7 баллов
найден только один верный ответ, при этом никакой неверный ответ не указан в качестве верного — 5 баллов

Задание 3. Вариант 2.
Уравнение $\left(x^2+17x+b\right)\left(x^2+17x+b+32\right)=0$ имеет четыре корня, образующих арифметическую прогрессию. Каким может быть первый член этой прогрессии? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.
Ответ: -14.5; -2.5.
Критерий оценивания:
точное совпадение ответа — 7 баллов
найден только один верный ответ, при этом никакой неверный ответ не указан в качестве верного — 5 баллов

Задание 3. Вариант 3.
Уравнение $\left(x^2+13x+b\right)\left(x^2+13x+b-32\right)=0$ имеет четыре корня, образующих арифметическую прогрессию. Каким может быть первый член этой прогрессии? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.
Ответ: -12.5; -0.5.
Критерий оценивания:
точное совпадение ответа — 7 баллов
найден только один верный ответ, при этом никакой неверный ответ не указан в качестве верного — 5 баллов

Задание 3. Вариант 4.
Уравнение $\left(x^2+16x+b\right)\left(x^2+16x+b+50\right)=0$ имеет четыре корня, образующих арифметическую прогрессию. Каким может быть первый член этой прогрессии? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.
Ответ: -15.5; -0.5.
Критерий оценивания:
точное совпадение ответа — 7 баллов
найден только один верный ответ, при этом никакой неверный ответ не указан в качестве верного — 5 баллов

Задание 4. Вариант 1. Обозначим через $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сумму чисел, обратных всем возможным произведениям чисел из множества $M=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (в произведение может входить и одно число).
Например, $P\,(3,\ 4,\ 6)=\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}=\frac{68}{72}=\frac{17}{18}$. Найдите $P(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 124,\ 125)$.
Ответ: 125.

Решение.
Первое решение. Докажем по индукции, что $P\,(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)=n$. База индукции: $P\,(1)=1=n$. Переход. Пусть $P\,(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k)=k$. Докажем, что $P\,(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k, k+1)=k+1$.
Имеем: $P\,(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k, k+1)=P\,(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k)+\frac{1}{k+1}\cdot(1+P\,(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k))$.
То есть $P\,(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k, k+1)=k+\frac{1}{k+1}\,(1+k)=k+1$. Утверждение доказано.
Второе решение. Рассмотрим выражение $F(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots, x_n)=\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{x_n}\right)$.
Заметим, что $P(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots, x_n)=F(x_1\ ,\ x_2\ ,\ldots, x_n)-1$. Значит, $P\,(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k)\ =\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)-1=$ $=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{k+1}{k}-1=(k+1)-1=k$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 2. Обозначим через $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сумму чисел, обратных всем возможным произведениям чисел из множества $M=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (в произведение может входить и одно число).
Например, $P\,(3,\ 4,\ 6)=\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}=\frac{68}{72}=\frac{17}{18}$. Найдите $P(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 224,\ 225)$.
Ответ: 225.
Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 3. Обозначим через $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сумму чисел, обратных всем возможным произведениям чисел из множества $M=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (в произведение может входить и одно число).
Например, $P\,(3,\ 4,\ 6)=\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}=\frac{68}{72}=\frac{17}{18}$. Найдите $P(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 324,\ 325)$.
Ответ: 325.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 4. Обозначим через $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сумму чисел, обратных всем возможным произведениям чисел из множества $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (в произведение может входить и одно число).

Например, $P(3,\ 4,\ 6) = \ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} = \frac{68}{72} = \frac{17}{18}$. Найдите $P(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 424,\ 425)$.

Ответ: 425.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 1. В пространстве даны замкнутая 11-звенная ломаная $A_1A_2\ldots A_{11}A_1$, каждое звено которой имеет длину 2, и точка S, такая, что каждый из треугольников SA_1A_2, SA_2A_3,…, $SA_{10}A_{11}$, $SA_{11}A_1$ – невырожденный, имеет целочисленные стороны, а у одного из них есть сторона длины 5. Для каждого из этих треугольников вычислили его периметр. Какое наибольшее значение периметра могло получиться?

Ответ: 22.

Решение. По неравенству треугольника получаем, что если одна из сторон такого треугольника – это натуральное число n, то вторая сторона – не больше $n+1$ (третья – это 2). К треугольнику с наибольшим периметром мы можем прийти, двигаясь по соседним треугольникам (с общей стороной) от треугольника со стороной 5, увеличивая сторону каждый раз на 1: $10 \ \leftarrow 9 \leftarrow 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10$. (Если одна из сторон будет не меньше 10, то, значит, в одном из направлений мы прошли больше 5 шагов, а тогда в другом будет пройдено меньше, и получится, что одна из сторон треугольника будет не меньше 11, а другая – не больше 9 (третья равна 2) – противоречие). В итоге получился треугольник со сторонами 10, 10, 2 и периметром 22.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 2. В пространстве даны замкнутая 13-звенная ломаная $A_1A_2\ldots A_{13}A_1$, каждое звено которой имеет длину 2, и точка S, такая, что каждый из треугольников SA_1A_2, SA_2A_3,…, $SA_{12}A_{13}$, $SA_{13}A_1$ – невырожденный, имеет целочисленные стороны, а у одного из них есть сторона длины 6. Для каждого из этих треугольников вычислили его периметр. Какое наибольшее значение периметра могло получиться?

Ответ: 26.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 3. В пространстве даны замкнутая 15-звенная ломаная $A_1A_2\ldots A_{15}A_1$, каждое звено которой имеет длину 2, и точка S, такая, что каждый из треугольников SA_1A_2, SA_2A_3,…, $SA_{14}A_{15}$, $SA_{15}A_1$ – невырожденный, имеет целочисленные стороны, а у одного из них есть сторона длины 7. Для каждого из этих треугольников вычислили его периметр. Какое наибольшее значение периметра могло получиться?

Ответ: 30.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 4. В пространстве даны замкнутая 17-звенная ломаная $A_1A_2\ldots A_{17}A_1$, каждое звено которой имеет длину 2, и точка S, такая, что каждый из треугольников SA_1A_2, SA_2A_3,…, $SA_{16}A_{17}$, $SA_{17}A_1$ – невырожденный, имеет целочисленные стороны, а у одного из них есть сторона длины 8. Для каждого из этих треугольников вычислили его периметр. Какое наибольшее значение периметра могло получиться?

Ответ: 34.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 1. По кольцевой трассе в одном направлении из разных точек трассы ровно в 08:00 стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 5 минут, второй – за 7 минут, третий – за 9 минут. Через полторы минуты все трое оказались в одной точке трассы. В какое время велосипедисты во второй раз окажутся в одной точке трассы, если их скорости постоянны? Ответ запишите в формате ЧЧ:ММ.

Ответ: 10 часов, 39 минут.

Решение. Пусть S — длина трассы, X — длина части трассы от места первой встречи велосипедистов до второй $(0 \le X < S)$, T — время между этими встречами. Скорости велосипедистов равны $v_1 = \frac{S}{5}$ $, v_2 = $ $\frac{S}{7}$ $, v_3 = $ $\frac{S}{9}$ (км/мин). По условию $T = \frac{kS+X}{v_1} = \frac{lS+X}{v_2} = \frac{mS+X}{v_3}$. Здесь k, l, m — количество полных кругов, которые проехали велосипедисты между первой встречей и второй. Подставив в эти равенства скорости, и введя обозначение $\frac{X}{S} = p,\ 0 \le p < 1$, получим: $T = 5k+5p = 7l+7p = 9m+9p$. Отсюда $2p = 5k-7l = 7l-9m$. Первый случай: $p = 0$. Тогда $5k = 7l = 9m$, тогда $k_{min} = 63$ (делится на 7 и на 9). Второй случай: $p = 0,5$. Тогда $1 = 5k - 7l = 7l - 9m$. Получили систему из двух уравнений в целых числах. Решением первого из них будет: $k = 3 + 7t,\ l = 2 + 5t$. Тогда $9m = 7l - 1 = 14 + 35t - 1 = 9(1 + 4t) + (4 - t)$. Значит, $t - 4$ делится на 9. Отсюда $t_{min} = 4$, тогда $k_{min} = 31$ $(l = 22,\ m = 17)$. Тогда $T = 5 \cdot 31 + 2,5 = 157,5$. Значит, вторая встреча всех велосипедистов произойдет через $1,5 + 157,5 = 159$ минут от начала движения.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 2. По кольцевой трассе в одном направлении из разных точек трассы ровно в 08:00 стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 7 минут, второй – за 9 минут, третий – за 11 минут. Через полторы минуты все трое оказались в одной точке трассы. В какое время велосипедисты во второй раз окажутся в одной точке трассы, если их скорости постоянны? Ответ запишите в формате ЧЧ:ММ.

Ответ: 13 часов, 48 минут.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 3. По кольцевой трассе в одном направлении из разных точек трассы ровно в 08:00 стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 3 минуты, второй – за 5 минут, третий – за 7 минут. Через полторы минуты все трое оказались в одной точке трассы. В какое время велосипедисты во второй раз окажутся в одной точке трассы, если их скорости постоянны? Ответ запишите в формате ЧЧ:ММ.

Ответ: 8 часов, 54 минуты.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 4. По кольцевой трассе в одном направлении из разных точек трассы ровно в 08:00 стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 3 минуты, второй – за 5 минут, третий – за 7 минут. Через две с половиной минуты все трое оказались в одной точке трассы. В какое время велосипедисты во второй раз окажутся в одной точке трассы, если их скорости постоянны? Ответ запишите в формате ЧЧ:ММ.

Ответ: 8 часов, 55 минут.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 1. Даны две параллельные прямые b и c, и точка A, не лежащая между ними. Луч, выходящий из точки A, перпендикулярно этим прямым, пересекает прямую b в точке P, а прямую c — в точке Q. Известно, что AP=4, AQ=18. Сколькими способами можно выбрать на прямой b точку B, а на прямой c точку C так, чтобы отрезки BP и CQ имели целую длину, а угол ACB был прямым?

Ответ: 36.

Решение. Введем обозначения: $AP = \alpha$, $AQ = \beta$, $PB = x$, $QC = y$. По теореме Пифагора $AC^2 = \beta^2 + y^2$, $BC^2 = (x-y)^2 + (\beta-\alpha)^2$, $AB^2 = \alpha^2 + x^2$. По условию $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Получаем: $\beta^2 + y^2 - xy - \alpha\beta = 0$. Получаем: $y\left(x-y\right) = \beta\left(\beta-\alpha\right)$. Число $18\,(18-14) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ раскладывается в произведение двух натуральных чисел $(2+1)\,(2+1)\,(1+1) = 18$ способами. Каждому такому разложению соответствуют искомые способы выбора точек и по одну, и по другую сторону от луча AQ. Поэтому искомый ответ: $2 \cdot 18 = 36$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 2. Даны две параллельные прямые b и c, и точка A, не лежащая между ними. Луч, выходящий из точки A, перпендикулярно этим прямым, пересекает прямую b в точке P, а прямую c — в точке Q. Известно, что AP=6, AQ=20. Сколькими способами можно выбрать на прямой b точку B, а на прямой c точку C так, чтобы отрезки BP и CQ имели целую длину, а угол ACB был прямым?

Ответ: 32.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 3. Даны две параллельные прямые b и c, и точка A, не лежащая между ними. Луч, выходящий из точки A, перпендикулярно этим прямым, пересекает прямую b в точке P, а прямую c — в точке Q. Известно, что AP=18, AQ=24. Сколькими способами можно выбрать на прямой b точку B, а на прямой c точку C так, чтобы отрезки BP и CQ имели целую длину, а угол ACB был прямым?

Ответ: 30.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 4. Даны две параллельные прямые b и c, и точка A, не лежащая между ними. Луч, выходящий из точки A, перпендикулярно этим прямым, пересекает прямую b в точке P, а прямую c — в точке Q. Известно, что AP=16, AQ=25. Сколькими способами можно выбрать на прямой b точку B, а на прямой c точку C так, чтобы отрезки BP и CQ имели целую длину, а угол ACB был прямым?

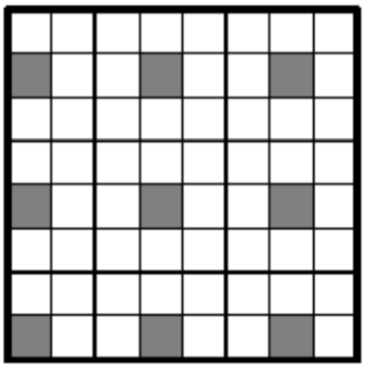
Ответ: 18.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 1. В клетках доски 62×92 стоят рыцари и лжецы — по одному человеку в каждой клетке. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый из них заявил, что одним из его соседей является лжец. Соседями считаются люди, клетки которых граничат по стороне или по вершине. Какое наибольшее число рыцарей может стоять на доске?

Ответ: 5053.

Решение. Решим задачу в более общем случае, для доски $(3n+2) \times (3m+2)$. Разобьём доску на квадраты 3×3, прямоугольники 2×3 и квадрат 2×2 (см. рисунок для случая $m = n = 2$). Закрасим в них клетки, как показано на рисунке.



Тогда либо в закрашенной клетке стоит лжец, либо, если в ней стоит рыцарь, в одной из соседних клеток стоит лжец (по утверждению рыцаря). Значит, в каждом из квадратов и прямоугольников такого разбиения стоит хотя бы один лжец. Тогда лжецов не менее $(n+1)(m+1)$, а рыцарей не более $(3n+2)(3m+2)-(n+1)(m+1) = 8mn+5m+5n+3$.

Этот ответ реализуется, если в каждой белой клетке стоит рыцарь.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 2. В клетках доски 47×92 стоят рыцари и лжецы — по одному человеку в каждой клетке. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый из них заявил, что одним из его соседей является лжец. Соседями считаются люди, клетки которых граничат по стороне или по вершине. Какое наибольшее число рыцарей может стоять на доске?

Ответ: 3828.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 3. В клетках доски 47×32 стоят рыцари и лжецы — по одному человеку в каждой клетке. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый из них заявил, что одним из его соседей является лжец. Соседями считаются люди, клетки которых граничат по стороне или по вершине. Какое наибольшее число рыцарей может стоять на доске?

Ответ: 1328.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 4. В клетках доски 32×92 стоят рыцари и лжецы — по одному человеку в каждой клетке. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый из них заявил, что одним из его соседей является лжец. Соседями считаются люди, клетки которых граничат по стороне или по вершине. Какое наибольшее число рыцарей может стоять на доске?

Ответ: 2603.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов