

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 56

Задание 1. Вариант 1. Петя и Боря проживают на улице Круглая, которая расположена вокруг озера. Каждый из них взял план города, и пронумеровал дома на улице Круглой по часовой стрелке: $1, 2, \dots$, начав отсчет со своего дома, которому присвоил номер 1. Оказалось, что дом, который на плане у Пети имеет номер 5, у Бори имеет номер 12, и наоборот — дом, который на плане у Бори имеет номер 5, у Пети имеет номер 12. Сколько всего домов на улице Круглая?

Ответ: 14.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Решение. Из условия следует, что вначале номера домов были по счету Пети на 7 больше, чем по счету Бори: $12 - 5 = 7$ (то есть такой счет: Б-6, П-13; Б-7, П-14, \dots ; вплоть до окончания Петей полного круга). И, посчитав последний дом: N , он вновь начнет счет: $1, 2, \dots$. То есть уменьшит свой счет на N . И у Пети 12-му дому по счету Бори будет соответствовать вместо 19 ($12 + 7 = 19$) номер $19 - N$. По условию это число равно 5. Значит, $N = 14$.

Задание 1. Вариант 2.

Петя и Боря проживают на улице Круглая, которая расположена вокруг озера. Каждый из них взял план города, и пронумеровал дома на улице Круглой по часовой стрелке: $1, 2, \dots$, начав отсчет со своего дома, которому присвоил номер 1. Оказалось, что дом, который на плане у Пети имеет номер 5, у Бори имеет номер 13, и наоборот — дом, который на плане у Бори имеет номер 5, у Пети имеет номер 13. Сколько всего домов на улице Круглая?

Ответ: 16.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 1. Вариант 3.

Петя и Боря проживают на улице Круглая, которая расположена вокруг озера. Каждый из них взял план города, и пронумеровал дома на улице Круглой по часовой стрелке: $1, 2, \dots$, начав отсчет со своего дома, которому присвоил номер 1. Оказалось, что дом, который на плане у Пети имеет номер 6, у Бори имеет номер 14, и наоборот — дом, который на плане у Бори имеет номер 6, у Пети имеет номер 14. Сколько всего домов на улице Круглая?

Ответ: 16.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 1. Вариант 4.

Петя и Боря проживают на улице Круглая, которая расположена вокруг озера. Каждый из них взял план города, и пронумеровал дома на улице Круглой по часовой стрелке: $1, 2, \dots$, начав отсчет со своего дома, которому присвоил номер 1. Оказалось, что дом, который на плане у Пети имеет номер 6, у Бори имеет номер 15, и наоборот — дом, который на плане у Бори имеет номер 6, у Пети имеет номер 15. Сколько всего домов на улице Круглая?

Ответ: 18.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 2. Вариант 1. На основании AC треугольника ABC выбрана точка N . Оказалось, что угол BNC в два раза больше угла BAC , а угол BNA в два раза больше угла BCA . Найдите длину отрезка BN , если $AB = 4$, $CB = 6$. В ответ запишите полученное значение, возведенное в квадрат.

Ответ: 13.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Решение. Из условия (угол BNC — внешний для треугольника BNA) следует равенство углов $\angle NAB = \angle NBA$, то есть равенство $BN = NA$. Аналогично $BN = NC$, то есть медиана BN равна половине стороны AC . Значит, треугольник ABC прямоугольный, и тогда по теореме Пифагора $(2BN)^2 = 4^2 + 6^2$. А медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Задание 2. Вариант 2. На основании AC треугольника ABC выбрана точка N . Оказалось, что угол BNC в два раза больше угла BAC , а угол BNA в два раза больше угла BCA . Найдите длину отрезка BN , если $AB = 6$, $CB = 10$. В ответ запишите полученное значение, возведенное в квадрат.

Ответ: 34.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 2. Вариант 3. На основании AC треугольника ABC выбрана точка N . Оказалось, что угол BNC в два раза больше угла BAC , а угол BNA в два раза больше угла BCA . Найдите длину отрезка BN , если $AB = 8$, $CB = 10$. В ответ запишите полученное значение, возведенное в квадрат.

Ответ: 41.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 2. Вариант 4. На основании AC треугольника ABC выбрана точка N . Оказалось, что угол BNC в два раза больше угла BAC , а угол BNA в два раза больше угла BCA . Найдите длину отрезка BN , если $AB = 8$, $CB = 12$. В ответ запишите полученное значение, возведенное в квадрат.

Ответ: 52.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3.

Вариант 1.

Сколько единиц участвует в десятичной записи 1001001-значного числа 121122111222111122221...?

Ответ: 500501.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Решение. У данного числа количество цифр: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots$. Если это число оканчивается на одинаковое (по n) количество единиц и двоек, то оно имеет $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$ цифр. Из того, что $1001000 = 1000 \cdot 1001$ следует, что у него после двойки идет одна единица, и количество единиц на одну больше количества двоек.

Задание 3. Вариант 2.

Сколько единиц участвует в десятичной записи 1001002-значного числа 121122111222111122221...?

Ответ: 500502.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 3.

Сколько единиц участвует в десятичной записи 1001003-значного числа 121122111222111122221...?

Ответ: 500503.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 4.

Сколько единиц участвует в десятичной записи 1001004-значного числа 121122111222111122221...?

Ответ: 500504.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 1.

Сумма двух дробей z/x и $y/3$ (x, y, z — натуральные числа) равна $5/11$. Какое наименьшее значение может принимать z ?

Ответ: 4.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Решение. Перепишем данное равенство в виде $\frac{z}{x} = \frac{5}{11} - \frac{y}{3} = \frac{15 - 11y}{33}$. Числа y и z — натуральные, поэтому числитель дроби тоже натуральное число, и потому $y = 1$. Тогда $\frac{z}{x} = \frac{4}{33}$ и наименьшее значение z равно 4.

Задание 4. Вариант 2.

Сумма двух дробей z/x и $y/2$ (x, y, z — натуральные числа) равна $8/11$. Какое наименьшее значение может принимать z ?

Ответ: 5.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 3.

Сумма двух дробей z/x и $y/3$ (x, y, z — натуральные числа) равна $7/13$. Какое наименьшее значение может принимать z ?

Ответ: 8.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 4.

Сумма двух дробей z/x и $y/2$ (x, y, z — натуральные числа) равна $10/13$. Какое наименьшее значение может принимать z ?

Ответ: 7.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 1. Уравнение $(x^2 - ax + b)(x^2 - (a + 48)x + b) = 0$ имеет 4 корня, являющиеся последовательными степенями двойки (например, $2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$). На какую наибольшую степень двойки может делиться произведение ab ?

Ответ: 16.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Решение. Пусть $2^k, 2^{k+1}, 2^{k+2}, 2^{k+3}$ — данные корни. По теореме Виета для данных квадратных уравнений произведения корней одинаковы (и равны b). Значит, корнями одного уравнения является пара $2^k, 2^{k+3}$, другого — $2^{k+1}, 2^{k+2}$. Сумма корней первого уравнения должна быть равна a , второго — $(a + 48)$. Но $2^k + 2^{k+3} = 9 \cdot 2^k > 2^{k+1} + 2^{k+2} = 6 \cdot 2^k$. Значит, $6 \cdot 2^k = a$ и $9 \cdot 2^k = a + 48$. Отсюда $3 \cdot 2^k = 48, k = 4$. Тогда a делится на $2^5, b$ делится на 2^{2k+3} , то есть на 2^{11} .

Задание 5. Вариант 2. Уравнение $(x^2 - ax + b)(x^2 - (a + 96)x + b) = 0$ имеет 4 корня, являющиеся последовательными степенями двойки (например, $2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$). На какую наибольшую степень двойки может делиться произведение ab ?

Ответ: 19.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 3. Уравнение $(x^2 - ax + b)(x^2 - (a + 192)x + b) = 0$ имеет 4 корня, являющиеся последовательными степенями двойки (например, $2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$). На какую наибольшую степень двойки может делиться произведение ab ?

Ответ: 22.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 4. Уравнение $(x^2 - ax + b)(x^2 - (a + 24)x + b) = 0$ имеет 4 корня, являющиеся последовательными степенями двойки (например, $2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$). На какую наибольшую степень двойки может делиться произведение ab ?

Ответ: 13.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 1. Два велосипедиста ехали с постоянными скоростями в течение получаса, и за это время второй велосипедист проехал на 6 км больше, чем первый. Затем они продолжили движение, сохранив свои скорости, и каждый ехал дополнительно столько минут, сколько километров он уже проехал. В итоге второй велосипедист за всё время движения проехал на 9 километров больше, чем первый. Найдите скорость второго велосипедиста. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 21.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Решение. Пусть S (км) — расстояние, которое проехал за полчаса первый велосипедист, тогда второй за это же время проехал $S + 6$ (км). Пусть V (км/ч) — скорость первого велосипедиста, тогда $V + 12$ (км/ч) — скорость второго велосипедиста, (он проехал за полчаса на 6 км больше). Значит, первый велосипедист суммарно ехал $\frac{S}{V} + \frac{V}{(2 \cdot 60)}$ (ч), а второй $\frac{(S + 6)}{(V + 12)} + \frac{(V + 12)}{(2 \cdot 60)}$ (ч). Умножая время движения на скорости $V + 12$ — второго велосипедиста и V — первого велосипедиста, получаем $(S + 6) + \frac{(V + 12)^2}{(2 \cdot 60)} - \left(S + \frac{V^2}{(2 \cdot 60)}\right) = 9$, то есть $V = 9, V + 12 = 21$.

Задание 6. Вариант 2. Два велосипедиста ехали с постоянными скоростями в течение получаса, и за это время второй велосипедист проехал на 6 км больше, чем первый. Затем они продолжили движение, сохранив свои скорости, и каждый ехал дополнительно столько минут, сколько километров он уже проехал. В итоге второй велосипедист за всё время движения проехал на 8 километров больше, чем первый. Найдите скорость второго велосипедиста. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 16.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 3. Два велосипедиста ехали с постоянными скоростями в течение получаса, и за это время второй велосипедист проехал на 6 км больше, чем первый. Затем они продолжили движение, сохранив свои скорости, и каждый ехал дополнительно столько минут, сколько километров он уже проехал. В итоге второй велосипедист за всё время движения проехал на 10 километров больше, чем первый. Найдите скорость второго велосипедиста. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 26.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 4. Два велосипедиста ехали с постоянными скоростями в течение получаса, и за это время второй велосипедист проехал на 3 км больше, чем первый. Затем они продолжили движение, сохранив свои скорости, и каждый ехал дополнительно столько минут, сколько километров он уже проехал. В итоге второй велосипедист за всё время движения проехал на 5 километров больше, чем первый. Найдите скорость второго велосипедиста. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 23.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 1. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Две прямые, делящие углы между диагоналями AC и BD пополам, пересекают: одна — стороны AB и CD в точках M и K , вторая — стороны BC и DA в точках N и L . Найдите отношение $MN : KL$, если известно, что $OA : OB : OC : OD = 2 : 3 : 2 : 5$.

Ответ: $21/25$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BM : MA = BO : OA = 3 : 2 = BO : OC = BN : NC$. Отсюда $MN \parallel AC$ и $MN : AC = BM : BA = 3 : 5$. Аналогично $KL \parallel AC$ и $KL : AC = DL : DA = 5 : 7$. Тогда искомое отношение равно $\frac{3}{5} : \frac{5}{7} = \frac{21}{25}$.

Задание 7. Вариант 2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Две прямые, делящие углы между диагоналями AC и BD пополам, пересекают: одна — стороны AB и CD в точках M и K , вторая — стороны BC и DA в точках N и L . Найдите отношение $MN : KL$, если известно, что $OA : OB : OC : OD = 2 : 3 : 2 : 4$.

Ответ: $9/10$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 3. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Две прямые, делящие углы между диагоналями AC и BD пополам, пересекают: одна — стороны AB и CD в точках M и K , вторая — стороны BC и DA в точках N и L . Найдите отношение $MN : KL$, если известно, что $OA : OB : OC : OD = 2 : 3 : 2 : 6$.

Ответ: $4/5$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 4. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Две прямые, делящие углы между диагоналями AC и BD пополам, пересекают: одна — стороны AB и CD в точках M и K , вторая — стороны BC и DA в точках N и L . Найдите отношение $MN : KL$, если известно, что $OA : OB : OC : OD = 2 : 3 : 2 : 7$.

Ответ: $27/35$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 1. Прямоугольник, длины обеих сторон которого принимают целочисленные значения не меньше 3, составлен из квадратов 1×1 (далее будем называть эти квадраты клетками). Для каждой клетки посчитали количество её соседей (соседними называются две клетки, имеющие общую сторону). Все посчитанные числа сложили и получили сумму 186. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 30.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Решение. Пусть $m \times n$ — размеры данного прямоугольника. У него 4 угловые клетки, каждая из которых имеет две соседние клетки; кроме того $2(n - 2) + 2(m - 2)$ не угловых клеток, расположенных на сторонах прямоугольника, у каждой из которых по 3 соседние клетки; а также $(n - 2)(m - 2)$ внутренние клетки, у каждой из которых по 4 соседние клетки. Общее количество соседних клеток равно $4 \cdot 2 + 3(2n + 2m - 8) + 4(mn - 2m - 2n + 4)$. $S = 4mn - 2m - 2n = (2m - 1)(2n - 1) - 1$. По условию $S = 186$, поэтому $(2m - 1)(2n - 1) = 187 = 11 \cdot 17$ — произведение двух простых чисел. Значит, $2m - 1 = 11$, $2n - 1 = 17$, откуда $m = 6$, $n = 9$ и периметр прямоугольника равен $2(m + n) = 30$.

Задание 8. Вариант 2. Прямоугольник, длины обеих сторон которого принимают целочисленные значения не меньше 3, составлен из квадратов 1×1 (далее будем называть эти квадраты клетками). Для каждой клетки посчитали количество её соседей (соседними называются две клетки, имеющие общую сторону). Все посчитанные числа сложили и получили сумму 220. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 32.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 3. Прямоугольник, длины обеих сторон которого принимают целочисленные значения не меньше 3, составлен из квадратов 1×1 (далее будем называть эти квадраты клетками). Для каждой клетки посчитали количество её соседей (соседними называются две клетки, имеющие общую сторону). Все посчитанные числа сложили и получили сумму 246. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 34.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 4. Прямоугольник, длины обеих сторон которого принимают целочисленные значения не меньше 3, составлен из квадратов 1×1 (далее будем называть эти квадраты клетками). Для каждой клетки посчитали количество её соседей (соседними называются две клетки, имеющие общую сторону). Все посчитанные числа сложили и получили сумму 322. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 38.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

Сириус.Курсы — для тех,
кто хочет знать больше!

